Matematika A2 - cvičení | 6.3. a 8.3. 2012

I. Lineární algebra

1. řešení soustavy rovnic s maticí, jejíž hodnost je menší než počet neznámých
2. lineární zobrazení
3. vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

II. Komplexní čísla a komplexní funkce

Příklady ze cvičení 4. a 5. 3. a dále:

1. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $z^2 + 2iz + 3 = 0$
2. Definujme-li pro $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y),$$

ověřte, že platí: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$; $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ i $e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.

3. Ukažte, že ($z \in \mathbb{C}$) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ (tj. funkce $z \to e^z$, $z \in \mathbb{C}$ je $2\pi i$ periodická v $\mathbb{C}$)

tedy také $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$

(tj. je $f(x) = e^{ix}$ je 2π-periodická v $\mathbb{R}$)

4. a) Vyjádřete v goniometrickém i exponenciálním tvaru číslo (i) $z = \sqrt{3} + i$; (ii) $z = -i$, (iii) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

b) Vyjádřete v algebraickém tvaru číslo $z = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z = e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

5. Vyjádřete $\sqrt[n]{e^{iy}}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$.

6. Vypočtěte $(1+i)^{15}$; $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[3]{i}$.
(K výpočtu užijte exponenciální tvar komplexního čísla.)

7. Označme $\phi(x) = f(x) + ig(x)$, kde f a g jsou reálné funkce reálné proměnné x, $x \in D$.

a) Co „znamená" limita, spojitost, derivace fce ϕ pro $x \in D$?

b) Platí i pro komplexní funkce reálné proměnné vzorce pro derivování součtu, součinu a podílu?

c) Je-li $\varphi : M \subset R \to D$ a má-li φ na M derivaci, platí
$$(\phi(\varphi(x)))' = \phi'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \; ?$$
($x \in M$, předpokládáme, že ϕ má derivaci v D)

d) Platí (i) $(\phi(x))^2 = 2\phi(x) \cdot \phi'(x)$, $x \in D$?
(opět předpokládáme, že ϕ má na D derivaci)
$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{1}{\phi(x)}\right)' = -\frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} \; ? \quad (\phi(x) \neq 0 \text{ na } D)$$

e) Je dáno $\phi(x) = \frac{1}{x+i}$, $x \in R$.

Najděte definiční obor ϕ, zjistěte, zda je zde ϕ spojitá a zda má zde derivaci (případně, derivaci spočtěte.)

8. Ukažte, že pro $x \in R$ a $\lambda \in C$ platí:
$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

III. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu (s konstantními koeficienty)

a) rovnice bez pravé strany (najděte obecné řešení a řešení dané počáteční úlohy):

$y'' - y' - 2y = 0$, $y(0)=1,\ y'(0)=-1$;

$y'' - 3y' = 0$, $y(0)=-2,\ y'(0)=1$;

$y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$;

$y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$;

$y'' + 4y = 0$, $y(0)=\sqrt{3},\ y'(0)=2$.

b) rovnice s pravou stranou – variace konstant

$y'' - y' - 2y = f(x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$, kde

(i) $f(x) = -4x$, (ii) $f(x) = e^{2x}$.

c) rovnice s pravou stranou – odhad partikulárního řešení

$y'' - y' - 2y = f(x)$, kde $f(x)$: $-4x$; x^2+1; e^{2x}; $3e^{x}$; xe^{-2x}; $\cos x + \sin x$; $\cos 2x$.

$y'' + 4y' + 4y = f(x)$, kde $f(x)$: $3x-1$; $2e^{3x}$; e^{2x}; $e^{2x}\cdot\cos x$; $\cos x - 4\sin x$.

$y'' - 2y' + 5y = f(x)$, kde $f(x)$: $(x+1)e^{x}$; $2x$; $e^{-x}\cos x$; $e^{x}\sin 2x$.